

Übungsklausur Integralrechnung - Hirnströme

Pflichtteil (ohne Hilfsmittel)

1) Berechne: $\int_0^1 (1-x^2) dx$ (2VP)

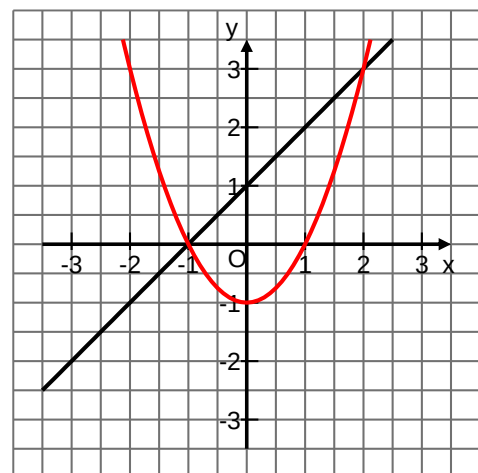
2) Gegeben ist die Funktion $f(x) = 3x^2 - x^3$.

a) Untersuche die Funktion auf Extremstellen und Wendestellen.

b) Bestimme die Gleichung der Wendetangente. (4VP)

3) a) Gib die Funktionsgleichungen der beiden Schaubilder an.

b) Bestimme den Inhalt der Fläche, die von beiden Schaubildern eingeschlossen wird. (4VP)



4) Das Rechteck ABCD mit A(1|0), B(2|0), C(2|8) und D(1|8) wird durch das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = x^3$ in zwei Teilflächen zerlegt.

a) Skizziere die beiden Teilflächen in einem Koordinatensystem.

b) Berechne das Verhältnis der beiden Teilflächen. (3VP)

5) Gegeben ist die Funktion $f(x) = 4 - x^2$.

Bestimme alle Werte für a , so dass gilt: $\int_0^a f(x) dx = 0$.

Interpretiere das Ergebnis geometrisch. (2VP)

Übungsklausur Integralrechnung - Hirnströme

Wahlteil (mit WTR und Merkhilfe)

Aufgabe 1

Die Hirnaktivität wird gemessen, indem man die Anzahl der Impulse pro Stunde misst, die das Gehirn erzeugt. Ist diese Anzahl groß, so spricht dies für eine hohe Denkleistung, entsprechend wird bei einer kleinen Anzahl wenig gedacht.



Die Hirnaktivität einer durchschnittlichen Schülerin kann während eines Schultages von 7:00Uhr bis 16:00Uhr näherungsweise durch die Funktion

$$h(t) = 1,8t^3 - 28,8t^2 + 118,8t + 28,8$$

beschrieben werden.

(Dabei gibt $h(t)$ die Anzahl der Impulse pro Stunde in 1000 an, t ist die Zeit in Stunden ab 7:00Uhr)

- a) (1) Skizziere das Schaubild für die Hirnaktivität während eines Schultages von 7:00 bis 16:00Uhr.
(2) Berechne, zu welcher Uhrzeit die maximale Hirnaktivität erreicht wird (mit Hilfe der ersten Ableitung. Ob es sich um einen Hoch- bzw. Tiefpunkt handelt darf mit dem Schaubild aus Aufgabe a) (1) geklärt werden).
Wie groß ist dann die Anzahl der Impulse pro Stunde?
(3) Gib an, in welchem Bereich sich die Anzahl der Impulse pro Stunde an einem Schultag, also zwischen 7:00 und 16:00 Uhr bewegt. (6VP)
- b) Innerhalb welcher Uhrzeiten arbeitet das Gehirn mit mindestens 75% der maximalen Hirnaktivität?
Bestimme den Zeitraum näherungsweise mit Hilfe Deiner Skizze aus Aufgabe a) und der Tabelle des Taschenrechners. (3VP)
- c) (1) Gib eine Funktion $H(t)$ an, die die Gesamtzahl der Impulse ab 7:00Uhr beschreibt.
(2) Wie viele Impulse erhält das Gehirn insgesamt von 7:00 bis 16:00Uhr?
(3) Man kann davon ausgehen, dass 1000 Impulse einen Energieverbrauch von 0,6 kcal verursachen.
Wie groß ist somit der Energieverbrauch des Gehirns während eines Schultages? (4VP)

Aufgabe 2

Bestimme den Hochpunkt der Funktionenschar

$$f_t(x) = -t \cdot x^2 - 2t \cdot x \quad (t > 0) \text{ in Abhängigkeit von } t.$$

(2VP)

Übungsklausur Integralrechnung - Hirnströme

Lösungen Pflichtteil:

$$1) \int_0^1 (1-x^2) dx = \left[x - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

2P

$$2) a) f'(x) = 6x - 3x^2; f''(x) = 6 - 6x; f'''(x) = -6 \quad (0,5P)$$

Extremstellen:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x \cdot (2-x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \text{ oder } x_2 = 2 \quad (0,5P)$$

$$f''(0) = 6 > 0 \Rightarrow \boxed{T(0|0)} \quad (0,5P)$$

$$f''(2) = -6 < 0 \Rightarrow \boxed{H(2|4)} \quad (0,5P)$$

Wendestellen:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6 - 6x = 0 \Rightarrow x = 1 \quad (0,5P)$$

$$f'''(1) = -6 \neq 0 \Rightarrow \boxed{W(1|2)} \quad (0,5P)$$

$$b) f'(1) = 3 = m \text{ und } W(1|2):$$

$$y = mx + c \Leftrightarrow 2 = 3 \cdot 1 + c \Leftrightarrow c = -1$$

$$\boxed{y = 3x - 1} \quad (1P)$$

4P

$$3) a) \boxed{y = x + 1} \quad (0,5P), \quad \boxed{f(x) = x^2 - 1} \quad (0,5P)$$

$$b) \text{ Schnittpunkte abgelesen: } x_1 = -1; x_2 = 2 \quad (0,5P)$$

$$\int_{-1}^2 (x+1 - (x^2-1)) dx = \int_{-1}^2 (-x^2 + x + 2) dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x \right]_{-1}^2$$

$$= -\frac{8}{3} + \frac{4}{2} + 4 - \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2 \right) = -\frac{8}{3} + \frac{4}{2} + 4 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2$$

$$= -3 + 8 - \frac{1}{2} = \boxed{\frac{9}{2}} \quad (2,5P)$$

4P

$$4) a) \text{ Skizze } (1P)$$

$$b) A_1 = \int_1^2 x^3 dx = \left[\frac{1}{4}x^4 \right]_1^2 = \boxed{\frac{15}{4}} \quad (1P)$$

$$A_2 = 8 - \frac{15}{4} = \boxed{\frac{17}{4}} \quad (0,5P) \quad \frac{A_1}{A_2} = \boxed{\frac{15}{17}} \quad (0,5P)$$

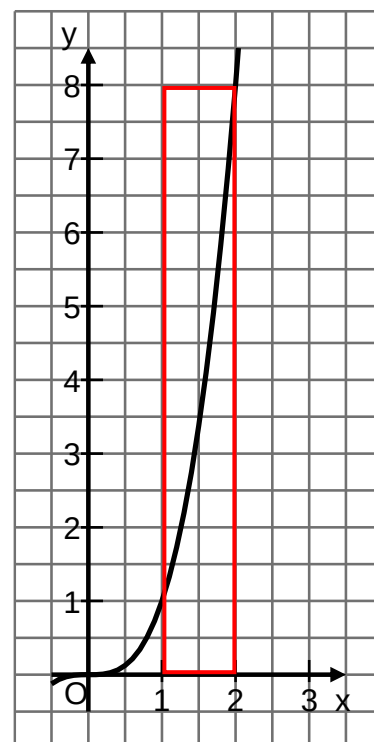
3P

$$5) \int_0^a (4-x^2) dx = \left[4x - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^a = 4a - \frac{1}{3}a^3 = a \cdot \left(4 - \frac{1}{3}a^2 \right) = 0 \quad (1P)$$

$$\Rightarrow a_1 = 0 \text{ oder } a_{2/3} = \pm\sqrt{12} \quad (0,5P)$$

Die Flächen oberhalb und unterhalb der x-Achse sind gleich groß. (0,5P)

2P



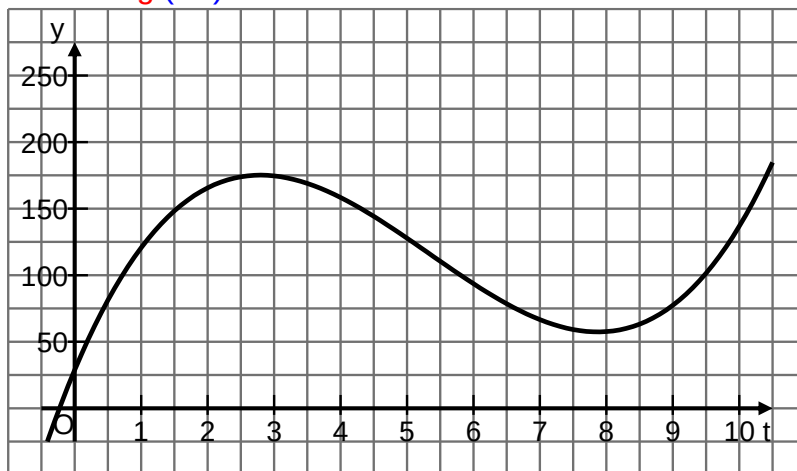
Summe: 15 Punkte

Übungsklausur Integralrechnung - Hirnströme

Lösungen Wahlteil:

Aufgabe 1

a) (1) Zeichnung (2P)



(2) $h'(t) = 5,4t^2 - 57,6t + 118,8 = 0$ (0,5P)

$$t^2 - \frac{57,6}{5,4}t + 22 = 0 \Rightarrow t_{\frac{1}{2}} = \frac{57,6}{10,8} \pm \sqrt{\left(\frac{57,6}{10,8}\right)^2 - 22} = \frac{57,6}{10,8} \pm \sqrt{\left(\frac{57,6}{10,8}\right)^2 - 22}$$

$$t_{\frac{1}{2}} = \frac{57,6}{10,8} \pm \sqrt{\frac{58}{9}} \approx 5,33 \pm 2,54 \Rightarrow t_1 = 7,87; t_2 = 2,79 \quad (2P)$$

$$h(2,8) = 175,2 \quad (0,5P)$$

Maximale Hirnaktivität um 9:48Uhr mit 175200 Impulsen / Stunde

(3) Minimaler Wert: $f(0) = 28800$

$\Rightarrow$ Zwischen 28800 Impulse / Stunde bis 175200 Impulse / Stunde (1P)

6P

b) 75% von 175,2 = 131,4 (1P)

$$h(t) = 131,4 \Rightarrow t_1 = 1,17 \text{ oder } t_2 = 4,90 \quad (1P)$$

Zwischen 8,17 = 8:10Uhr und 11,9 = 11:54Uhr (1P)

3P

c) (1) $H(t) = \left(\frac{1,8}{4}t^4 - \frac{28,8}{3}t^3 + \frac{118,8}{2}t^2 + 28,8t \right) \cdot 1000$

$$= (0,45t^4 - 9,6t^3 + 59,4t^2 + 28,8t) \cdot 1000 \quad (1,5P)$$

(2) $H(9) = 1024650 \Rightarrow 1024650$ Impulse (1,5P)

(3) $\frac{1024650}{1000} \cdot 0,6 \text{kcal} = 614,79 \text{kcal} \quad (1P)$

4P

Aufgabe 2

$$f'_t(x) = -2t \cdot x - 2t = 0 \Leftrightarrow -2tx = 2t \Rightarrow x = -1 \quad y = f_t(-1) = -t + 2t = t \Leftrightarrow y = t$$

$$\Rightarrow H(-1|t)$$

2P

Summe: 15 Punkte